ТИПОВЫЕ
тестовые задания по математике
(предметная олимпиада)

МАТЕМАТИКА

1 **Из натуральных чисел от 1 до 252 выбросили все числа, которые делятся на 2, но не делятся на 5, и все числа, которые делятся на 5, но не делятся на 2. Сколько осталось чисел? (*делимым считается такое число, которое делится без остатка*)**

Ответ:

2 **Найдите сумму квадратов корней уравнения:**

$$(x^2 - 10x)^2 - 2023(x^2 - 10x) + 2024 = 0.$$

Ответ:

3 **Решите уравнение. Если несколько корней, в ответе напишите сумму корней:**

$$(x - 4)^{x^2 - 16} = 1.$$

Ответ:

4 **Дано уравнение $6\,\overline{xx} \cdot \overline{xy} = \overline{xxyy}$. Найдите число $\overline{xy}$ ($\overline{ab}$ и $\overline{abcd}$ соответственно обозначают двузначное и четырёхзначное число).**

Ответ:

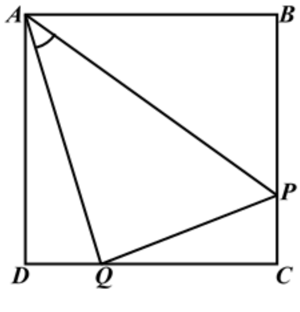
5 **Разность между членами последовательности $3, 5, 9, 15, 23, \dots$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите сотый член этой последовательности.**

Ответ:

6 **Трое ребят собрали 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить между собой, если все яблоки являются одинаковыми (*то есть цель такова, сколько яблок получит каждый, а не какие яблоки ему достанутся*)?**

Ответ:

7 **Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна 28 см. На сторонах BC и DC расположены точки P и Q (см. рис). $\angle PAQ = 45°$. Найдите периметр треугольника PQC.**



Ответ:

8 **Для скольких целых значений x значение дроби**

$$\frac{x^2(50 - x^2)(x^2 - 99)}{(x^2 - 4)(x^2 - 16)}$$

является неотрицательным?

Ответ:

9 **Из города A в город B на поезде нужно перевезти 20 больших и 250 маленьких контейнеров. Один вагон вмещает 30 маленьких контейнеров, каждый весом 2 тонны. Большой контейнер весит 30 тонн и занимает столько места, сколько занимают 9 маленьких контейнеров. Грузоподъёмность вагона 80 тонн. Найдите минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.**

Ответ:

10 **Функция $f(x)$ такова, что для всех рациональных чисел x и y выполняется равенство $f(x+y) = f(x)f(y)$. Известно, что $f(4) = 16$. Найдите значение $200\sqrt{2} \cdot f(-1,5)$.**

Ответ:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 **Решите систему уравнений:**

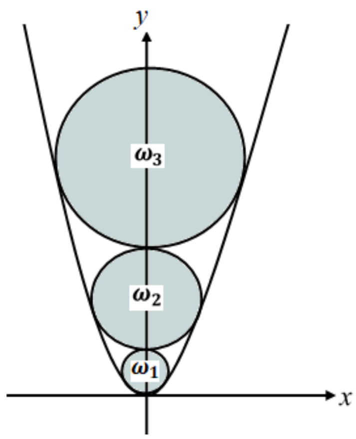
$$\begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0, \\ y^5 + \dfrac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2. \end{cases}$$

! Максимальное возможное количество очков – 10.

2 **Докажите, что многочлен $x^{2024} + x^{2023} + \cdots + 1$ делится на $x^{404} + x^{403} + \cdots + 1$.**

! Максимальное возможное количество очков – 10.

3 **Внутри параболы $y = x^2$ окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ расположены так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей параболы и окружности ω_{n-1}. Радиус окружности ω_1 равен $\frac{1}{2}$, и касается параболы в её вершине (см. рис.). Найдите радиус окружности ω_{2024}.**



! Максимальное возможное количество очков – 10.

4 **Точки $K(-4;6), L(2;8)$, $M(6;4), N(-2;\ -2)$ лежат на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$, соответственно. Найдите площадь квадрата.** ***(Нахождение координат точек, длины отрезков и площади квадрата с использованием расположения точки на координатной плоскости не считается как решение. Нахождение координат точек, длины отрезков и площади квадрата должно быть в письменном виде).***

! Максимальное возможное количество очков – 10.

5 **Корни уравнения**

$$x^3 - \frac{32}{p}x^2 + \frac{5}{\sqrt{p}}x - \frac{15}{64} = 0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3 - \frac{1}{3}|log_2 p|x^2 + \left(\log_{8\sqrt{2}p} p\right)x - \frac{1}{11+\sqrt{p}} = 0$$

– длинами высот этого же треугольника. Найдите значение p и площадь треугольника.

! Максимальное возможное количество очков – 10.

6 **Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках M и N, соответственно, и пересекает гипотенузу в точках K и L. Найдите площадь четырехугольника $KMNL$, если $AM = 9$ см, NB =16 см.**

! Максимальное возможное количество очков – 10.